

## 一、问题重述与模型假设

本问题探讨在有限的时间序列内，如何通过数学策略最大化寻找最优伴侣的概率。为建立严谨的数学模型，我们提出以下假设：

1. **样本总数确定：**假设在高中至大学期间，总共会遇到  $n$  位潜在的候选对象。
2. **随机性与可比性：**这  $n$  人的“适合度”各不相同，可以进行严格排名（1 为最优， $n$  为最差）。且他们出现的顺序是完全随机的，共有  $n!$  种排列可能。
3. **决策不可逆：**按时间顺序依次遇到候选人，面对每位候选人必须立即做出“确定关系”或“拒绝”的排他性选择。不能回头选择已拒绝的人。
4. **信息局限：**考察当前候选人时，只能获知其与之前已出现候选人的相对排名，无法预知其在整个  $n$  人中的绝对排名。
5. **唯一目标：**决策的唯一成功标准是选中绝对排名第一（最适合）的那位伴侣。选中其他任何人均视为失败。

## 二、模型建立与策略制定

面对此信息不对称的动态决策过程，引入“样本观察策略”（即最优停止理论中的经典策略）：

设定一个观察期参数  $k$  ( $1 < k \leq n$ )。对前  $k-1$  个出现的候选人，采取“只观察不选择”的策略，并记录这  $k-1$  人中的最高适合度（设为基准线  $M$ ）。

从第  $k$  个人开始，一旦遇到适合度超过基准线  $M$  的候选人，立刻停止寻找并确定关系。

## 三、模型推导与求解

设事件  $A$  为“成功选中全局绝对排名第一的候选人”。我们需要求解在策略  $k$  下，事件  $A$  发生的概率  $P(k)$ 。

假设全局排名第一的人出现在第  $i$  个位置 ( $1 \leq i \leq n$ )：

1. 当  $i < k$  时：该最优候选人落入了观察期，必然被错过，此时成功的概率为 0。
2. 当  $i \geq k$  时：要确保在第  $i$  个位置才停止并选中他，必须保证在第  $k$  到第  $i-1$  个位置上出现的候选人，其适合度均低于观察期基准线  $M$ 。

这等价于：前  $i-1$  个人中的相对最优者，必须出现在前  $k-1$  个人的观察期内。

前  $i-1$  个人的相对最优者落在前  $k-1$  个位置的概率为  $\frac{k-1}{i-1}$ 。全局最优者恰好出

现在第  $i$  个位置的概率为  $\frac{1}{n}$ 。

综合上述分析，采用参数  $k$  策略的成功概率函数为：

$$P(k) = \sum_{i=k}^n \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{k-1}{i-1} \right) = \frac{k-1}{n} \sum_{i=k}^n \frac{1}{i-1}$$

当样本总量  $n$  足够大时，离散求和可转化为连续函数的定积分。

令观察期占总人数的比例为  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}$ ，则有  $dx = \frac{1}{n}$ 。将公式转化为关于  $x$  的函数：

$$P(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -x \ln(x)$$

为求最大成功概率，对  $P(x)$  求导并令导数为 0：

$$P'(x) = -\ln(x) - x \left( \frac{1}{x} \right) = -\ln(x) - 1 = 0$$

解得最优比例：

$$\ln(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e} \approx 0.3678$$

将极值点代入原方程，求得最大概率：

$$P\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \approx 36.8\%$$

#### 四、 结论与分析

在寻找终身伴侣的过程中，为最大概率找到最契合的“灵魂伴侣”，最优解是将前 **37%** 的潜在候选人作为观察样本，用于建立择偶基准线。度过观察期后，只要遇到比观察期内所有人都优秀的候选人，就应果断做出选择。采用此策略，寻得最优伴侣的数学期望（成功率）同样为 **37%**。

#### 五、 MATLAB 蒙特卡洛仿真代码

% 寻找最优伴侣（秘书问题）蒙特卡洛模拟验证

function find\_soulmate\_simulation()

N = 500; % 设定潜在候选人总数，可以任意修改，为节约计算时间，可适当改小

simulations = 10000; % 蒙特卡洛模拟次数

success\_rates = zeros(1, N);

for k = 1:N

    success\_count = 0;

    for s = 1:simulations

        % 生成 1-N 的随机排列，数字大小代表适合度（N 为最优）

        candidates = randperm(N);

        % 确立观察期基准线

        if k == 1

            best\_in\_sample = 0;

        else

            best\_in\_sample = max(candidates(1:k-1));

        end

```

        chosen = 0;
        % 寻找第一个突破基准线的候选人
        for i = k:N
            if candidates(i) > best_in_sample
                chosen = candidates(i);
                break;
            end
        end

        % 判断是否选中了全局最优 (N)
        if chosen == N
            success_count = success_count + 1;
        end
    end

    % 记录当前 k 值下的成功率
    success_rates(k) = success_count / simulations;
end

% 输出最优解与图表绘制
[max_prob, optimal_k] = max(success_rates);
fprintf('仿真得出最佳停止位置: 第 %d 个人 (约占总数 %.1f%%)\n', optimal_k, (optimal_k/N)*100);
fprintf('仿真最大成功概率: %.2f%%\n', max_prob * 100);

plot(1:N, success_rates, 'b-', 'LineWidth', 2);
title('伴侣选择策略: 观察期比例与成功率关系');
xlabel('观察样本数量 (k)');
ylabel('选中最优伴侣的概率 P(k)');
grid on;
end

```